Н. Б. Рогов

Как научиться решать задание B15 ЕГЭ по информатике (системы логических уравнений) за 180+ минут

Материалы для занятий

Раздел в сети: http://basicschool.ru/?page=exam_info_b15

Теоретическое введение: http://basicschool.ru/?page=exam_info_b15_intro_1

Не предназначено для использования на уроках
в непрофильных классах общеобразовательной школы

Санкт-Петербург • 2013

Занятие 1. Запись логического уравнения в виде системы или совокупности.

Часть 1. Системы и совокупности, действия с ними.

Решения всякого уравнения или неравенства можно определить в виде множества. Каждое решение при этом является элементом множества, так что даже если решение одно, такое множество просто будет содержать один элемент. Элемент множества сам может быть множеством. Например, решение уравнения $x-1=7$ — одно ($x=8$, т. е. множество решений содержит один элемент), а неравенство $x-1>7$ имеет бесконечное множество частных решений, описываемое общим решением $x>8$ (здесь решение — это множество решений, включающее бесконечное число возможных значений переменной x, правда, соответствующих известному условию).

Имеет смысл привести более оригинальный способ записи решения: выражение $y=x-1$ вполне может сойти за общее решение какого-нибудь уравнения с двумя переменными (а, может, и бóльшим количеством переменных, значения которых не влияют на результат). Приведенная запись тоже является множеством решений, как и неравенство, ведь она, по сути, является *уравнением, которое имеет бесконечное множество частных решений.*

Наконец, замахнемся на самое сокровенное: **любое уравнение или неравенство можно называть решением.** Только потому, что оно функционально связывает заданные в нем переменные, значения которых всегда можно вывести согласно имеющейся закономерности. Однако, поскольку мы умеем решать не всякое уравнение или неравенство, сделаем оговорку: ***будем называть решением такое выражение, очевидным следствием которого являются конкретные значения указанных в нем переменных (частные решения).*** Например, одним из очевидных следствий неравенства $x>8$ является $x=9$, а уравнения $y=x-1$ — пара значений $(1;0)$, которая, кстати, является системой: $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$.

Система уравнений (и/или неравенств) — это решение, которое является множеством, образованным пересечением всех частных решений, указанных в нем. Например, система $\begin{cases}x\ge 1\\x<3\end{cases}$ есть решение, которое выглядит в привычной форме двойного неравенства как $1\le x<3$, а его частным решением может быть такое: $x=1$. Подробнее о пересечении множеств можно прочитать на сайте «Образовательный сервис ИнфоКонсалтинг» (http://basicschool.ru/?page=info_sets_05).

Совокупность уравнений (и/или неравенств) — это решение, которое является множеством, образованным объединением всех частных решений, указанных в нем. Например, совокупность $\left[\begin{matrix}x<1\\x<3\end{matrix}\right.$ есть решение, которое записывается в более простой форме: $x<3$. Его частным решением может быть такое: $x=2\frac{1}{2}$. Подробнее об объединении множеств можно прочитать на сайте «Образовательный сервис ИнфоКонсалтинг» (http://basicschool.ru/?page=info_sets_06).

Покажем некоторые способы обозначения подмножеств решений системы и совокупности уравнений/неравенств.

- **Система систем.** Если система содержит несколько частных решений, то их можно произвольно сгруппировать во вложенные системы, и наоборот. Пусть задана система неравенств:

$$\begin{cases}x+10<16\\3x-2\le 10\\x>1\\\frac{x}{3}>1\end{cases}.$$

Система частных решений этих неравенств:

$$\begin{cases}x<6\\x\le 4\\x>1\\x>3\end{cases}.$$

Но эти решения группируются во вложенные системы разными способами. Возможно это сделать так:

$$\begin{cases}\begin{cases}x<6\\x\le 4\end{cases}\\\begin{cases}x>1\\x>3\end{cases}\end{cases},\ \text{или}\ \begin{cases}\begin{cases}x<6\\x>1\end{cases}\\\begin{cases}x\le 4\\x>3\end{cases}\end{cases},\ \text{или}\ \begin{cases}\begin{cases}\begin{cases}x<6\\x\le 4\end{cases}\\x>1\end{cases}\\x>3\end{cases}.$$

- **Система совокупностей.** Если имеется система, пересекающая несколько совокупностей, ее можно представить как совокупность систем, в любую из которых входят по одному элементу каждой исходной совокупности так, чтобы вновь полученные системы обеспечивали все возможные пересечения элементов исходных совокупностей.

Например, систему совокупностей

$$\begin{cases}\left[\begin{matrix}x=3\\x=10\end{matrix}\right.\\\left[\begin{matrix}x<5\\x<10\end{matrix}\right.\end{cases}$$

можно представить следующим способом:

$$\left[\begin{matrix}\begin{cases}x=3\\x<5\end{cases}\\\begin{cases}x=3\\x<10\end{cases}\\\begin{cases}x=10\\x<5\end{cases}\\\begin{cases}x=10\\x<10\end{cases}\end{matrix}\right..$$

- **Совокупность систем.** Пусть имеется совокупность нескольких систем. Она может быть записана как система совокупностей, в любую из которых входят по одному элементу каждой исходной системы так, чтобы вновь полученные совокупности обеспечивали все возможные объединения элементов исходных систем.

Следующая совокупность

$$\left[\begin{matrix}\begin{cases}x=3\\x<10\end{cases}\\\begin{cases}x=5\\x>3\end{cases}\end{matrix}\right.$$

может быть записана как система:

$$\begin{cases}\left[\begin{matrix}x=3\\x=5\end{matrix}\right.\\\left[\begin{matrix}x=3\\x>3\end{matrix}\right.\\\left[\begin{matrix}x<10\\x=5\end{matrix}\right.\\\left[\begin{matrix}x<10\\x>3\end{matrix}\right.\end{cases},\ \text{или, соответственно,}\ \begin{cases}\left[\begin{matrix}x=3\\x=5\end{matrix}\right.\\x\ge 3\\x<10\\x\in R\end{cases},\ \text{что выражается еще проще:}\ \begin{cases}\left[\begin{matrix}x=3\\x=5\end{matrix}\right.\\3\le x<10\end{cases}.$$

- **Совокупность совокупностей.** Если совокупность содержит несколько элементов, то их можно произвольно сгруппировать во вложенные совокупности, и наоборот.

Пусть в ходе решения некоторой задачи получилась совокупность решений

$$\left[\begin{array}{l} x < 6 \\ x = 4 \\ x = 1 \\ x < 3 \end{array}\right..$$

Ее можно записать, например, так:

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x < 6 \\ x < 3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 1 \end{array}\right. \end{array}\right..$$

Часть 2. Представление базовых бинарных логических операций.

Для любого логического выражения важно выяснить, при каких условиях оно истинно. По этой причине при составлении уравнения, если не указано иное, любое логическое выражение приравнивается истинному значению.

- Из определения **конъюнкции** следует, что уравнение вида $x \wedge y = 1$ может быть преобразовано к системе $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$, т. к. результат конъюнкции является истинным лишь в случае истинности обоих ее аргументов.
- Следствие определения **дизъюнкции** — совокупность как ее представление. Так, уравнение вида $x \vee y = 1$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right.$, ведь оно истинно при условии истинности хотя бы одного аргумента.

Поскольку любое логическое выражение представляется через базовые логические операции, оно может быть записано в виде системы или совокупности, которые в свою очередь могут содержать другие системы и/или совокупности.

Часть 3. Запись логического уравнения в виде системы или совокупности.

Пусть предложено логическое уравнение: $x \wedge y \vee (x \vee y) = 1$.

Заменим показанные в его левой части отдельные отношения между переменными x и y новыми переменными так, чтобы стало видно действие, выполняемое в последнюю очередь:

$$\begin{cases} A = x \wedge y \\ B = x \vee y. \\ A \vee B = 1 \end{cases}$$

Как видно, уравнение после замены переменных приняло вид $A \vee B = 1$. В левой его части единственным действием является дизъюнкция, так что оно должно быть представлено в виде совокупности:

$$\begin{cases} A = x \wedge y \\ B = x \vee y \\ \left[\begin{array}{l} A = 1 \\ B = 1 \end{array}\right. \end{cases}, \text{ или } \left[\begin{array}{l} x \wedge y = 1 \\ x \vee y = 1 \end{array}\right..$$

Уравнения, входящие в совокупность, преобразуются к системе и совокупности соответственно:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right. \end{array}\right..$$

Часть 4. Представление инверсии в системах и совокупностях логических уравнений.

Пусть предложено логическое уравнение $\neg x \wedge y \vee \neg(x \vee \neg y) = 1$. Тогда

$$\begin{cases} A = \neg x \wedge y \\ B = x \vee \neg y \\ A \vee \neg B = 1 \end{cases}, \text{ из чего следует } \begin{cases} A = \neg x \wedge y \\ B = x \vee \neg y \\ \left[\begin{array}{l} A = 1 \\ \neg B = 1 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Но, если $\neg B = 1$, то $B = 0$. Тогда указанную систему можно переписать так:

$$\begin{cases} A = \neg x \wedge y \\ B = x \vee \neg y \\ \left[\begin{array}{l} A = 1 \\ B = 0 \end{array}\right. \end{cases}, \text{ или } \left[\begin{array}{l} \neg x \wedge y = 1 \\ x \vee \neg y = 0 \end{array}\right., \text{ и тогда, по аналогии, } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \neg x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ x \vee \neg y = 0 \end{array}\right., \text{ или } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \\ x \vee \neg y = 0 \end{array}\right..$$

Мы видим, что при равенстве некоторого логического выражения нулю (лжи) записать уравнение в виде системы или совокупности пока не представляется возможным. Поэтому инвертируем его левую и правую части, а затем применим одно из правил Моргана:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \\ \neg(x \vee \neg y) = 1 \end{array}\right., \text{ т. е. } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \\ \neg x \wedge y = 1 \end{array}\right..$$

После такого преобразования дальнейшие действия становятся более привычными:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \neg x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right., \text{ т. е. } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right..$$

Замечаем, что совокупность содержит два идентичных элемента (системы), значит, нам достаточно представить ее в виде *одной* системы:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Окончательное представление исходного уравнения в виде простой системы наталкивает на мысль о том, что сначала можно было упростить его. Действительно, $\neg x \wedge y \vee \neg(x \vee \neg y) = \neg x \wedge y \vee \neg x \wedge y = \neg x \wedge y$.

Часть 5. Представление других именованных бинарных логических операций.

- **Импликация** выражается с использованием дизъюнкции как единственной бинарной операции: $x \longrightarrow y = \neg x \vee y$. Следовательно, уравнение, в котором выясняется истинность импликации ($x \longrightarrow y = 1$), может быть записано в виде совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\neg x = 1\\ y = 1\end{array}\right.\text{, или } \left[\begin{array}{l}x = 0\\ y = 1\end{array}\right..$$

- **Логическое вычитание** может быть представлено выражением с использованием исключительно базовых операций с помощью известной формулы $x \oplus y = (x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y)$. Тогда уравнение вида $x \oplus y = 1$ может быть записано так: $(x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y) = 1$.

Пусть $A = x \vee y$ и $B = x \wedge y$:

$$\begin{cases}A = x \vee y\\ B = x \wedge y\\ A \wedge \neg B = 1\end{cases}\text{, т. е. }\begin{cases}A = x \vee y\\ B = x \wedge y\\ \begin{cases}A = 1\\ \neg B = 1\end{cases}\end{cases}\text{, или }\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = 1\\ y = 1\end{array}\right.\\ \neg(x \wedge y) = 1\end{cases}.$$

Используя преобразования по правилу Моргана, получаем:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = 1\\ y = 1\end{array}\right.\\ \neg x \vee \neg y = 1\end{cases}.$$

Теперь можно и вместо второго уравнения получить (также) совокупность:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = 1\\ y = 1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\neg x = 1\\ \neg y = 1\end{array}\right.\end{cases}.$$

Тогда логическое вычитание представляется так:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = 1\\ y = 1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x = 0\\ y = 0\end{array}\right.\end{cases}.$$

Полученный результат можно проверить. Вот как выглядят все решения обеих совокупностей системы:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 1\\ y = 0\end{cases}\\ \begin{cases}x = 1\\ y = 1\end{cases}\\ \begin{cases}x = 0\\ y = 1\end{cases}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 0\\ y = 0\end{cases}\\ \begin{cases}x = 0\\ y = 1\end{cases}\\ \begin{cases}x = 1\\ y = 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}.$$

Две системы из верхней совокупности имеются и в нижней совокупности, поэтому они вместе являются решениями исходного уравнения:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 1\\ y = 0\end{cases}\\ \begin{cases}x = 0\\ y = 1\end{cases}\end{array}\right..$$

Итак, уравнение вида $x \oplus y = 1$ записывается одним из двух способов — как система или совокупность решений:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = 1\\ y = 1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x = 0\\ y = 0\end{array}\right.\end{cases}\text{ или }\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 1\\ y = 0\end{cases}\\ \begin{cases}x = 0\\ y = 1\end{cases}\end{array}\right..$$

- **Эквиваленция** — действие, обратное логическому вычитанию. Значит, решения уравнения вида $x \Leftrightarrow y = 1$ могут быть записаны в такой форме:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 0\\ y = 0\end{cases}\\ \begin{cases}x = 1\\ y = 1\end{cases}\end{array}\right..$$

Занятие 2. Решение простых логических уравнений.

Пример 1. Решить уравнение $(u \vee v) \wedge (u \wedge \neg v) = 1$.

Не будем использовать метод замены переменных, запишем систему сразу:

$$\begin{cases} u \vee v = 1 \\ u \wedge \neg v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u = 1 \\ v = 1 \end{array}\right. \\ \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \end{cases}.$$

Указав по-отдельности все решения первой совокупности, получаем:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \end{array}\right. \\ \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \end{cases}.$$

Среди своих решений совокупность имеет одно такое, которое представлено нижней системой. Оно и является решением всей системы:

$$\begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases}.$$

Мы видим, что перед процессом решения левую часть уравнения требовалось упростить. Можно доказать, что уравнения $(u \vee v) \wedge (u \wedge \neg v) = 1$ и $u \wedge \neg v = 1$ равносильны.

Пример 2. Решить уравнение $v \oplus (u \wedge \neg v) = 1$.

Запишем логическое вычитание (ведь оно выполняется в последнюю очередь) в виде совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} v = 0 \\ u \wedge \neg v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} v = 1 \\ u \wedge \neg v = 0 \end{cases} \end{array}\right..$$

В верхней системе можно сразу указать решения второго ее уравнения. А вот второе уравнение нижней системы придется преобразовать так, чтобы для него выяснять случаи истинности левой части, а не ложности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} v = 0 \\ \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} v = 1 \\ \neg(u \wedge \neg v) = 1 \end{cases} \end{array}\right..$$

Решения верхней системы уже видны. Уравнение же нижней нужно преобразовать по правилу Моргана:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} v = 1 \\ \neg u \vee v = 1 \end{cases} \end{array}\right., \text{ что дает } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} v = 1 \\ \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ v = 1 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right..$$

Запишем подробно все решения, соответствующие совокупности второй системы, и получим набор пар значений переменных:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} v = 1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right., \text{ из чего следует } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \end{array}\right..$$

Заполним таблицу, отразив в ней значения переменных, при которых выполняется заданное уравнение:

u	v
1	0
0	1
1	1

Пример 3. Решить уравнение $(u \vee v) \wedge (u \wedge \neg v) = 0$.

Преобразуем данное уравнение так, чтобы выяснять случаи истинности его левой части, а не ложности: $\neg\big((u \vee v) \wedge (u \wedge \neg v)\big) = 1$, т. е. $\neg u \wedge \neg v \vee (\neg u \vee v) = 1$.

В виде совокупности его можно записать так:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \\ \neg u \vee v = 1 \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} u = 0 \\ v = 1 \end{array}\right. \end{array}\right..$$

Имеет смысл показать конкретные решения нижней совокупности, общая совокупность при этом выглядит так:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right..$$

Верхняя система общей совокупности содержится в нижней совокупности, так что решением исходного уравнения является следующее (показана и таблица значений переменных):

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \end{array}\right..$$

u	v
0	0
0	1
1	1

Сравните результат с Примером 1, в уравнении которого была предложена та же левая часть.

Пример 4. Решить уравнение $(\neg x \wedge y) \vee (\neg y \wedge z) \vee (x \wedge \neg z) = 1$.

Представим данное уравнение в виде совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}y=0\\ z=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\ z=0\end{cases}\end{array}\right..$$

Заметим, что ни одна ее система не содержит решения никакой другой системы, поэтому показанную совокупность можно считать решением исходного уравнения, демонстрирующим все комбинации («тройки») значений логических переменных. В самом деле, из первой системы следует, что z может принимать любое возможное значение при $x = 0$ и $y = 1$; из второй — что x может быть любым при $y = 0$ и $z = 1$; третья система определяет возможность присвоения любого значения переменной y, но лишь при $x = 1$ и $z = 0$. Тем самым показаны все 6 возможных решений уравнения, которые отражены в таблице (цветом выделены значения переменных, взятые непосредственно из совокупности).

x	y	z
0	1	0
0	1	1
0	0	1
1	0	1
1	0	0
1	1	0

Пример 5. Решить уравнение $((x_1 \Leftrightarrow x_2) \vee (x_3 \Leftrightarrow x_4)) \wedge ((x_1 \oplus x_2) \vee (x_3 \oplus x_4)) = 1$.

Заметим, что $x_n \Leftrightarrow x_{n+1} = \neg(x_n \oplus x_{n+1})$. Тогда можно выполнить такую замену:

$$\begin{cases}A = x_1 \Leftrightarrow x_2\\ B = x_3 \Leftrightarrow x_4\\ (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) = 1\end{cases}.$$

Уравнение представляет собой формулу, по которой логическое вычитание выражается через базовые логические операции. Так что

$$\begin{cases}A = x_1 \Leftrightarrow x_2\\ B = x_3 \Leftrightarrow x_4\\ A \oplus B = 1\end{cases} \text{ или } \begin{cases}A = x_1 \Leftrightarrow x_2\\ B = x_3 \Leftrightarrow x_4\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}A=1\\ B=0\end{cases}\\ \begin{cases}A=0\\ B=1\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}.$$

Выполним обратную замену A и B:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1 \Leftrightarrow x_2 = 1\\ x_3 \Leftrightarrow x_4 = 0\end{cases}\\ \begin{cases}x_1 \Leftrightarrow x_2 = 0\\ x_3 \Leftrightarrow x_4 = 1\end{cases}\end{array}\right..$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\end{cases}\\ \begin{cases}x_1=1\\ x_2=1\end{cases}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_3=0\\ x_4=1\end{cases}\\ \begin{cases}x_3=1\\ x_4=0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=0\\ x_2=1\end{cases}\\ \begin{cases}x_1=1\\ x_2=0\end{cases}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_3=0\\ x_4=0\end{cases}\\ \begin{cases}x_3=1\\ x_4=1\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right..$$

Верхняя и нижняя системы совокупности дают по четыре решения, которые не являются для этих систем общими. При этом они, естественно, превращаются в совокупности (справа эти две совокупности, являющиеся элементами основной совокупности, записаны по-отдельности):

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\\ x_3=0\\ x_4=1\end{cases}\\ \begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\\ x_3=1\\ x_4=0\end{cases}\\ \begin{cases}x_1=1\\ x_2=1\\ x_3=0\\ x_4=1\end{cases}\\ \begin{cases}x_1=1\\ x_2=1\\ x_3=1\\ x_4=0\end{cases}\end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=0\\ x_2=1\\ x_3=0\\ x_4=0\end{cases}\\ \begin{cases}x_1=0\\ x_2=1\\ x_3=1\\ x_4=1\end{cases}\\ \begin{cases}x_1=1\\ x_2=0\\ x_3=0\\ x_4=0\end{cases}\\ \begin{cases}x_1=1\\ x_2=0\\ x_3=1\\ x_4=1\end{cases}\end{array}\right..$$

Кстати, все восемь систем можно сделать элементами единой совокупности. Таблицу значений переменных уравнения запишите самостоятельно.

Занятие 3. Количество решений логического уравнения. Обратные уравнения.

Часть 1. Оценка количества решений.

Если в уравнении присутствует n логических переменных, то количество его решений не может превосходить 2^n. В самом деле, если выполнять решение такого уравнения с помощью таблицы истинности, то в ней появится именно 2^n строк. Изучим несколько ситуаций, связанных с таблицей истинности, составленной для некоторого уравнения, и каждый раз будем считать количество его возможных решений.

1) Пусть уравнение содержит 8 логических переменных, тогда общее количество решений не превосходит $2^8 = 256$.

2) Уравнение содержит 12 логических переменных, а все решения находятся при единственном условии, что четвертая переменная ложна. Здесь общее количество решений не превосходит $2^{12} = 4096$, четвертая переменная ложна в половине случаев, значит, всего решений — 2048.

3) Решений некоторого уравнения ровно столько, сколько раз повторяется в таблице истинности комбинация $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_6 = 0 \end{cases}$ (а всего переменных в уравнении — 7). Тогда отмечаем тот факт, что в системе упомянуты 3 переменные, всего 7, значит, количество упоминаний показанной комбинации — $2^{7-3} = 2^4 = 16$ (почему это так, см. Часть 2 далее). Кстати, общее количество решений не может превосходить 128, так что полученный результат можно считать верным.

4) Решений некоторого уравнения ровно столько, сколько раз повторяется в таблице истинности комбинация $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_6 = 0 \end{array}\right.$ (всего переменных в уравнении — 7). Отмечаем, что в совокупность входят 3 переменные, всего 7, значит, количество упоминаний в таблице истинности хотя бы одного из приведенных в совокупности условий — $3 \times 2^{7-1} - 3 \times 2^{7-2} + 2^{7-3} = 112$, решений, разумеется, столько же (почему это так, см. Часть 3 далее). Кстати, общее количество решений не может превосходить 128, так что полученный результат можно считать правильным.

Часть 2. Количество решений системы значений логических переменных.

Наличие *системы* значений логических переменных указывает на то, что все эти значения должны быть присвоены соответственным переменным одновременно и без исключений. Рассмотрим таблицу истинности, содержащую n логических переменных, для $m \leq n$ из которых в системе определены значения. В ней остается $n - m \geq 0$ переменных, для каждой из которых могут быть определены любые значения (из двух возможных). Получается 2^{n-m} комбинаций, являющихся решениями уравнения.

Решим уравнение $x_1 \wedge x_2 \wedge (x_3 \vee \neg x_3) = 1$ без предварительного преобразования с использованием формул. Оно может быть представлено в виде системы:

$$\begin{cases} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x_3 = 1 \\ x_3 = 0 \end{array}\right. \end{cases}.$$

В ней вторая совокупность допускает оба возможных значения логической переменной x_3, поэтому ее можно опустить. В результате имеем одну маленькую систему, описывающую исходное уравнение и содержащую его решения:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}.$$

Если бы в уравнении были представлены две переменные x_1 и x_2, то, очевидно, система (и уравнение) имела бы одно решение. Но переменных три. Значит, $n = 3$, $m = 2$, уравнение имеет $2^{3-2} = 2$ решения. Действительно, их можно показать с помощью таких преобразований первой системы (см. также таблицу значений переменных):

$$\begin{cases} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x_3 = 1 \\ x_3 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \end{array}\right..$$

x_1	x_2	x_3
1	1	0
1	1	1

Важно! *Система, в которой указаны исключительно значения неповторяющихся логических переменных, не содержащая никаких вложенных совокупностей, имеет строго одно решение для определенных в ней переменных. Если такая система содержит не все переменные уравнения, то количество решений описываемого ею уравнения вычисляется как* 2^{n-m}, *где* n *— общее количество логических переменных уравнения,* m *— количество логических переменных, упомянутых в этой системе (разумеется,* $m \leq n$*).*

Часть 3. Количество решений совокупности значений логических переменных.

Совокупность значений логических переменных показывает, что каждой из них по-отдельности может быть присвоено указанное значение, при этом одновременность такого присваивания соблюдаться не должна (оставшиеся переменные получают любые допустимые значения). В этом случае мы имеем столько множеств значений переменных, скольким переменным присвоены отличающиеся значения в совокупности. Вычислить же нужно количество комбинаций в *объединении* этих множеств, что выполняется по формуле (1):

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|X_i| - \sum_{i<j}\left|X_i \cap X_j\right| + \sum_{i<j<k}\left|X_i \cap X_j \cap X_k\right| - \ldots - (-1)^n \left|\bigcap_{i=1}^{n} X_i\right| \quad \textbf{(1)}$$

Здесь n — количество объединяемых множеств, X_i — очередное объединяемое множество.

Формула (1) принимает наиболее простой вид для двух множеств, количество элементов (комбинаций значений логических переменных) объединения которых нужно узнать — (2):

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad \textbf{(2)}$$

Приведем формулу (1) в виде для трех объединяемых множеств — (3):

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad \textbf{(3)}$$

Пусть нужно оценить количество решений уравнения $u \vee \neg v = 1$. Составим для него совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} u = 1 \\ v = 0 \end{array}\right.$$

Имеем два множества комбинаций значений логических переменных, одно из них образуется при $u = 1$ (назовем это множество A), второе — при $v = 0$ (пусть это множество называется B). Всего в исходном уравнении две логические переменные, значит, при $u = 1$ существует два решения уравнения (т. е. $|A| = 2$), при $v = 0$ — тоже два ($|B| = 2$). Теперь представим, что наши множества пересекаются; и вправду, это происходит при $\begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$. Заключаем, что $|A \cap B| = 1$. Подставляя полученные значения в (2), получаем, что $|A \cup B| = 2 + 2 - 1 = 3$.

Определим количество решений и для чуть более сложного уравнения: $x_1 \vee \neg x_2 \wedge x_3 = 1$. Составим совокупность:

$$\left[\begin{array}{c} x_1 = 1 \\ \neg x_2 \wedge x_3 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Так, решениями уравнения являются все, в комбинациях значений переменных которых $x_1 = 1$ (множество A) или одновременно $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$ (множество B). Имеем: $|A| = 4$, $|B| = 2$, $|A \cap B| = 1$. Подставляя в (2), получаем $|A \cup B| = 4 + 2 - 1 = 5$ (решений уравнения).

Часть 4. Обратное уравнение.

Пусть имеется некоторое логическое уравнение. ***Будем называть другое уравнение, содержащее те же переменные, решения которого есть все, не являющиеся решениями первого, обратным по отношению к первому.*** *Обратное уравнение получается из исходного путем инвертирования одной — левой или правой — его части.* ***Исходное и обратное ему уравнения будем называть взаимно обратными.*** Например, взаимно обратными являются уравнения $u \vee v = 1$ и $u \vee v = 0$, решения первого из которых описываются совокупностью $\left[\begin{array}{l} u = 1 \\ v = 1 \end{array}\right.$, второго — $\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$.

На самом деле совсем не обязательно получать систему как описание решений второго уравнения путем известного преобразования с использованием правила Моргана. Имеется общее правило записи решений обратного уравнения из решений основного:

1) все системы (представляющая основное уравнение и вложенные) заменяются на совокупности, а совокупности — на системы;

2) в полученных системах и совокупностях все истинные значения логических переменных заменяются на ложные, а ложные — на истинные.

Пусть, например, имеется уравнение $\neg s \wedge t \ \vee s \wedge u \vee \neg(t \vee u) = 1$. Найдем для него обратное уравнение.

Для этого запишем решения исходного уравнения в виде совокупности трех систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} s = 0 \\ t = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} s = 1 \\ u = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} t = 0 \\ u = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Чтобы построить обратное уравнение, сначала определим его решения в виде системы трех совокупностей:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} s = 1 \\ t = 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} s = 0 \\ u = 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ u = 1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Получается что-то вроде такого уравнения: $(s \vee \neg t) \ \wedge (\neg s \vee \neg u) \wedge (t \vee u) = 1$. Оно может быть дополнительно преобразовано.

Можно поступить по-другому: не изменяя левую часть исходного уравнения, исправим значение правой части на противоположное (истину на ложь, и наоборот). Так что обратным по отношению к предложенному является и такое уравнение: $\neg s \wedge t \ \vee s \wedge u \vee \neg(t \vee u) = 0$.

Количества решений взаимно обратных уравнений связаны друг с другом. Если в таких уравнениях использовано n логических переменных, а число решений одного из них равно k, то число решений обратного ему уравнения будет составлять $2^n - k$.

Например, уравнение $x \wedge y = 1$ имеет одно решение: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$. В нем использовано две логические переменные. Обратным для него является уравнение $\neg x \vee \neg y = 1$ (или $x \wedge y = 0$), которое имеет $2^2 - 1 = 3$ решения: $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$.

Для установления количества решений некоторого уравнения иногда проще решить обратное ему. Тогда останется лишь определить количество решений обратного уравнения и, наконец, количество решений исходного.

Занятие 4+. Решение систем логических уравнений.

Систему (как, кстати, и совокупность) логических уравнений во всех случаях можно толковать как одно логическое уравнение, поэтому процесс ее решения очень похож на процесс решения отдельно взятого уравнения, — он был рассмотрен выше (см. Занятие 2). Однако часто встречаются ситуации, при которых система содержит несколько уравнений, построенных по одному и тому же принципу; в этом случае достаточно решить одно уравнение из числа однотипных, а переменным остальных таких уравнений соответственно присвоить вычисленные значения.

Нахождение количества решений системы логических уравнений тесно связано с поиском самих решений: далеко не всегда удается избежать записи конкретных решений всей системы или ее отдельных уравнений.

Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} A \lor B \land C = 1 \\ A \Leftrightarrow B = C \\ A \land C = 1 \end{cases}.$$

Данную систему можно записать так:

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A = 1 \\ B \land C = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \Leftrightarrow B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} A \Leftrightarrow B = 1 \\ C = 1 \end{cases} \end{array}\right. \\ \begin{cases} A = 1 \\ C = 1 \end{cases} \end{array}\right., \text{ или } \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A = 1 \\ \begin{cases} B = 1 \\ C = 1 \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ C = 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases} \end{array}\right. \\ C = 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \begin{cases} A = 1 \\ C = 1 \end{cases} \end{array}\right..$$

Заметим, что все частные решения этой системы содержат $\begin{cases} A = 1 \\ C = 1 \end{cases}$. Поэтому ее можно записать проще:

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}.$$

Теперь видно, что система имеет одно частное решение. Таблицу значений переменных системы, содержащую это решение, запишите самостоятельно.

Пример 2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (x_1 \to x_2) \lor (x_2 \to \neg x_3) = 1 \\ (x_1 \lor x_2) \land (x_2 \lor \neg x_3) = 1 \end{cases}.$$

Запишем систему так, чтобы в ней каждое уравнение было представлено системой или совокупностью:

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right..$$

Замечаем, что совокупность (как элемент основной системы, т. е. вложенная) представляет все возможные решения, поэтому основная система равна своей вложенной системе: достаточно решить лишь ее (из этого, кстати, следует, что первое уравнение является тождеством, т. е. выполняется при любых значениях логических переменных):

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{array}\right. \end{array}\right..$$

Представим данные совокупности так, чтобы стали видны их конкретные частные решения — комбинации значений логических переменных:

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right..$$

Пересекая решения совокупностей, получим все частные решения системы. Пересечение можно выполнить так, как показано в таблице справа: принимаются лишь те строки как наборы значений переменных, для которых поставлены оба плюса (т. е. система значений относится и к первой, и второй совокупностям). Этих строк пять (выделены цветом), из них видны конкретные решения всей системы уравнений.

x_1	x_2	x_3	Решения первой совокупности	Решения второй совокупности
0	0	0		+
0	0	1		
0	1	0	+	+
0	1	1	+	+
1	0	0	+	+
1	0	1	+	
1	1	0	+	+
1	1	1	+	+

Пример 3. Найти число решений системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 \to x_2 = 1 \\ x_2 \to x_3 = 1 \\ x_3 \to x_4 = 1 \\ x_4 \to x_5 = 1 \end{cases}.$$

Запишем систему логических уравнений в виде системы совокупностей:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_5 = 1 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Было бы несколько проще узнать количество решений совокупности, обратной этой системе, а затем узнать число решений системы:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_4 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases} \end{array}\right..$$

Каждая система совокупности по-отдельности, с учетом не упомянутых в ней переменных, имеет по 8 решений, но отдельные эти решения пересекаются. Поэтому применим формулу расчета количества элементов объединения четырех множеств, чтобы найти требуемое число. Обозначим эти системы буквами от A до D соответственно. Тогда формула (1) принимает вид (4):

$$\begin{gathered} |A \cup B \cup C \cup D| = \\ = |A| + |B| + |C| + |D| - \\ -|A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + \\ +|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - \\ -|A \cap B \cap C \cap D| \end{gathered} \qquad \textbf{(4)}$$

Обратите внимание! В ***этом*** решении:

1) две соседние системы совокупности не пересекаются, значит…

2) никакие три или более систем этой совокупности не пересекаются.

Считаем число решений совокупности, обратной исходной системе, по формуле (4):

$$|A \cup B \cup C \cup D| = 8 + 8 + 8 + 8 - 0 - 2 - 2 - 0 - 2 - 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - 0 = 26.$$

Значит, *система* уравнений имеет $2^5 - 26 = 6$ решений.

Пример 4. Найти число решений системы уравнений:

$$\begin{cases} (x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3) \wedge (x_3 \to x_4) \wedge (x_4 \to x_5) = 1 \\ (y_1 \to y_2) \wedge (y_2 \to y_3) \wedge (y_3 \to y_4) \wedge (y_4 \to y_5) = 1. \\ y_5 \to x_5 = 1 \end{cases}$$

Первые два уравнения системы содержат только различающиеся переменные и при этом имеют идентичную структуру (являются однотипными), поэтому пока будет достаточно представить в виде самостоятельной системы лишь одно верхнее уравнение:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_5 = 1 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Запишем для каждой совокупности все возможные комбинации значений логических переменных:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	0			
0	1			
1	1			
	0	0		
	0	1		
	1	1		
		0	0	
		0	1	
		1	1	
			0	0
			0	1
			1	1

Пересекая первую и вторую совокупность, получаем такие решения для переменных $x_1 \dots x_3$:

x_1	x_2	x_3
0	0	0
0	0	1
0	1	1
1	1	1

Полученные решения пересечем с третьей совокупностью:

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

А их — с четвертой совокупностью:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Теперь мы видим все решения верхнего уравнения исходной системы. Второе ее уравнение имеет точно такие же решения, но — для переменных $y_1 \dots y_5$:

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Таким образом, первые два уравнения исходной системы имеют 36 различных *совместных* решений. Третьему ее уравнению, видимо, удовлетворяют не все они. Чтобы это проверить, поместим решения второго и решения первого рядом и посмотрим, при каких условиях выполняется третье (что окрашено в таблицах значений?):

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

При $y_5 = 0$ можно выбрать все шесть решений первого уравнения. А вот каждый раз при $y_5 = 1$ (5 таких решений второго уравнения) реально выбрать только те решения первого, в которых $x_5 = 1$ (по 5 решений первого уравнения на каждое решение второго). Итого имеем $6 + 5 \times 5 = 31$ частное решение системы в целом.

Пример 5. Найти число решений системы уравнений:

$$\begin{cases}(x_1 \vee y_1) \Leftrightarrow (x_2 \vee y_2) = 1\\ (x_2 \wedge y_2) \Leftrightarrow (x_3 \wedge y_3) = 1.\\ (x_1 \to x_3) \vee (y_1 \to y_3) = 1\end{cases}$$

Будем записывать системы и совокупности, соответствующие уравнениям исходной системы, раздельно, подразумевая, что они являются составной частью общей системы. Решать их также будем по-отдельности.

Итак, первое уравнение можно представить в виде совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\begin{cases}x_1 = 0\\ y_1 = 0\end{cases}\\ \begin{cases}x_2 = 0\\ y_2 = 0\end{cases}\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1 = 1\\ y_1 = 1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x_2 = 1\\ y_2 = 1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right., \text{ или, что есть то же самое, } \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1 = 0\\ y_1 = 0\\ x_2 = 0\\ y_2 = 0\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1 = 1\\ y_1 = 1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x_2 = 1\\ y_2 = 1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right..$$

Рассмотрим вторую систему этой совокупности, выпишем (для последующего пересечения) решения ее совокупностей:

x_1	x_2	y_1	y_2
0		1	
1		0	
1		1	
	0		1
	1		0
	1		1

Пересекая эти решения, получаем 9 решений второй системы:

x_1	x_2	y_1	y_2
0	0	1	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Тогда все решения *первого уравнения исходной системы* (10) выглядят так (решение первой ее системы выделено цветом):

x_1	x_2	y_1	y_2
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Аналогично поступим со вторым уравнением системы. Запишем его в виде совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x_2=0\\y_2=0\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x_3=0\\y_3=0\end{array}\right.\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x_2=1\\y_2=1\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x_3=1\\y_3=1\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.\text{, или, что есть то же самое, }\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x_2=0\\y_2=0\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x_3=0\\y_3=0\end{array}\right.\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x_2=1\\y_2=1\\x_3=1\\y_3=1\end{array}\right.\end{array}\right..$$

Работая по тому же плану, получим все решения второго уравнения исходной системы (10):

x_2	x_3	y_2	y_3
0	0	0	0
0	0	0	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	0	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Пересечем решения первых двух уравнений. Для этого таблицы удобно расположить рядом (что окрашено в них?):

x_1	x_2	y_1	y_2
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	0
1	1	1	1

x_2	x_3	y_2	y_3
0	0	0	0
0	0	0	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	0	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Определяя, сколько строк правой таблицы можно использовать с каждой строкой левой, получаем 24 решения *системы первых двух уравнений* (но не всех трех):

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Теперь осталось найти решения третьего уравнения исходной системы и пересечь их с только что полученными. Это уравнение можно представить так:

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x_1 = 0\\ x_3 = 1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}y_1 = 0\\ y_3 = 1\end{array}\right.\end{array}\right..$$

Имеем такие решения третьего уравнения (9):

x_1	x_3	y_1	y_3
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Тогда из полученных ранее решений двух первых уравнений вместе придется исключить два (строки, содержащие эти решения, выделены цветом):

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Осталось 22 решения, которые являются общими для всех уравнений предложенной в задании системы.

Пример 6. Найти число решений системы уравнений:

$$\begin{cases}(x_1 \oplus x_2) \wedge (x_3 \oplus x_4) = 1\\ (x_2 \oplus x_3) \wedge (x_4 \oplus x_5) = 1\\ (x_3 \oplus x_4) \wedge (x_5 \oplus x_6) = 1\\ (x_1 \oplus x_6) \wedge (x_2 \oplus x_5) \wedge (x_3 \oplus x_4) = 1\end{cases}.$$

Будем записывать системы и совокупности, соответствующие уравнениям исходной системы, раздельно, подразумевая, что они являются составной частью общей системы. Решать их также будем по-отдельности.

Итак, первое уравнение можно представить в виде системы:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1 = 0\\ x_2 = 1\end{cases}\\ \begin{cases}x_1 = 1\\ x_2 = 0\end{cases}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_3 = 0\\ x_4 = 1\end{cases}\\ \begin{cases}x_3 = 1\\ x_4 = 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}.$$

Ее решения показаны в таблице:

x_1	x_2	x_3	x_4
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0

Второе и третье уравнения исходной системы имеют в качестве решений такие же наборы значений, но предназначены эти значения для других переменных:

Решения II уравнения			
x_2	x_3	x_4	x_5
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0

Решения III уравнения			
x_3	x_4	x_5	x_6
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0

Решая первую и вторую системы совместно, получаем два решения для переменных $x_1 \dots x_5$ (что окрашено в таблицах значений?):

Решения I уравнения			
x_1	x_2	x_3	x_4
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0

Решения II уравнения			
x_2	x_3	x_4	x_5
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0

Решения I и II уравнения				
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	1	0	1	0
0	1	1	0	—
1	0	0	1	—
1	0	1	0	1

Эти решения могут быть использованы с решениями третьей системы (что окрашено в таблицах значений?):

Решения I и II уравнения				
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1

Решения III уравнения			
x_3	x_4	x_5	x_6
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0

Решения первых трех уравнений					
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0

Четвертое уравнение в виде системы выглядит так:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_6 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_6 = 1 \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_5 = 1 \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}.$$

А вот все его решения, среди которых видны два, найденных ранее в качестве решений первых трех уравнений вместе (выделены цветом):

Решения IV уравнения					
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

Эти два решения и являются общими решениями предложенной в задании системы уравнений.

Пример 7. Найти число решений системы уравнений (демо-версия 2012 г.):

$$\begin{cases} \big((x_1 \Leftrightarrow x_2) \vee (x_3 \Leftrightarrow x_4)\big) \wedge \big(\neg(x_1 \Leftrightarrow x_2) \vee \neg(x_3 \Leftrightarrow x_4)\big) = 1 \\ \big((x_3 \Leftrightarrow x_4) \vee (x_5 \Leftrightarrow x_6)\big) \wedge \big(\neg(x_3 \Leftrightarrow x_4) \vee \neg(x_5 \Leftrightarrow x_6)\big) = 1 \\ \dots \\ \big((x_7 \Leftrightarrow x_8) \vee (x_9 \Leftrightarrow x_{10})\big) \wedge \big(\neg(x_7 \Leftrightarrow x_8) \vee \neg(x_9 \Leftrightarrow x_{10})\big) = 1 \end{cases}.$$

Многоточие, имеющее место в системе, показывает, что в ней должно быть больше трех (явно записанных) однотипных уравнений. Если изучить индексы переменных, то мы убедимся, что недостает одного уравнения:

$$\big((x_5 \Leftrightarrow x_6) \vee (x_7 \Leftrightarrow x_8)\big) \wedge \big(\neg(x_6 \Leftrightarrow x_6) \vee \neg(x_7 \Leftrightarrow x_8)\big) = 1.$$

Упростим эти уравнения (подробнее преобразования описывались в Примере 5 Занятия 2):

$$\begin{cases} A_i = x_{2i-1} \Leftrightarrow x_{2i} \\ \begin{cases} A_1 \oplus A_2 = 1 \\ A_2 \oplus A_3 = 1 \\ A_3 \oplus A_4 = 1 \\ A_4 \oplus A_5 = 1 \end{cases} \end{cases}.$$

Мы можем получить систему даже в таком виде:

$$\begin{cases} A_i = x_{2i-1} \Leftrightarrow x_{2i} \\ \begin{cases} A_1 \neq A_2 \\ A_2 \neq A_3 \\ A_3 \neq A_4 \\ A_4 \neq A_5 \end{cases} \end{cases}.$$

Из этого следует вот что:

$$\begin{cases} A_i = x_{2i-1} \Leftrightarrow x_{2i} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A_2 = 0 \\ A_3 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} A_2 = 1 \\ A_3 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A_3 = 0 \\ A_4 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} A_3 = 1 \\ A_4 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A_4 = 0 \\ A_5 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} A_4 = 1 \\ A_5 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{cases}.$$

Первое уравнение (теперь оно выглядит как первая совокупность вложенной системы) имеет решения, показанные в таблице справа.

A_1	A_2
0	1
1	0

Значит, такими должны быть решения всех четырех уравнений по-отдельности:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	1			
1	0			
	0	1		
	1	0		
		0	1	
		1	0	
			0	1
			1	0

Совместными решениями первого и второго уравнений являются такие:

A_1	A_2	A_3
0	1	0
1	0	1

Теперь проанализируем пересечение решений первых трех уравнений:

A_1	A_2	A_3	A_4
0	1	0	1
1	0	1	0

И, наконец, всех четырех:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1

Учитывая эти решения и произведенную ранее замену переменных, перейдем обратно к переменным $x_1 \dots x_{10}$. *Для первой строки значений* $A_1 \dots A_5$ имеем такую систему:

$$\left\{\begin{array}{l}
\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=0\\x_2=1\end{cases}\\ \begin{cases}x_1=1\\x_2=0\end{cases}\end{array}\right.\\
\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_3=0\\x_4=0\end{cases}\\ \begin{cases}x_3=1\\x_4=1\end{cases}\end{array}\right.\\
\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_5=0\\x_6=1\end{cases}\\ \begin{cases}x_5=1\\x_6=0\end{cases}\end{array}\right.\\
\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_7=0\\x_8=0\end{cases}\\ \begin{cases}x_7=1\\x_8=1\end{cases}\end{array}\right.\\
\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_9=0\\x_{10}=1\end{cases}\\ \begin{cases}x_9=1\\x_{10}=0\end{cases}\end{array}\right.
\end{array}\right. .$$

Каждая из пяти совокупностей дает 512 решений для переменных $x_1 \dots x_{10}$, при этом переменные любой совокупности не содержатся ни в одной другой совокупности. Пересекая решения первой совокупности (512) с решениями второй, получаем 256 решений, а их с третьей — 128, полученные с четвертой — 64, и, наконец, решения четырех совокупностей с пятой — 32 решения.

По аналогии можно построить систему и для второй строки значений $A_1 \dots A_5$, которая тоже даст 32 решения, не пересекающиеся с полученными на предыдущем этапе. Итого имеем 64 решения исходной системы уравнений.